Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*

Josep Gascón
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Barcelona

ABSTRACT

In this article we reconstruct the development of Didactics of Mathematics as a scientific discipline. We start from the body of problems spontaneously encountered by the teacher and go through didactic's classical point of view which systematizes and generalizes such matters.
After following expansions, a lot of unexplained phenomenons and unsolved didactical problems forced to modelize mathematical school activity. Historically this new trend of thought, known as **"**fundamental didactics" and called initially "experimental epistemology", corresponds to the first formulations of the *didactic situations theory*.
Whithin the framework of this new scientific research 90
program, and starting from didactic transposition theory, has arisen the *anthropological approach of didactics,* which takes the *institutionalized studing process of mathematics* as its main object of study.

RÉSUMÉ

Nous présentons une reconstruction de la didactique des mathématiques en tant que discipline scientifique, en prenant comme point de départ la problématique du professeur et en passant par el point de vue classique en didactique qui systématise et généralise cette problématique.
Après des élargissements successifs de la problématique didactique, une foule de phénomènes non expliqués et des problèmes didactiques sans resoudre ont poussé à prendre en charge et modéliser l'activité mathématique scolaire. Cela a donné naissance à l'"épistémologie expérimentale" qui, après les premières formulations de la *théorie des situations didactiques*, a pris el nom de "didactique fondamentale".
Dans el cadre de ce nouveau programme de recherche, et partant de la théorie de la transposition didactique, surgit l'*approche antropologique* qui, dans ses derniers développements, prend comme objet premier de recherche le processus d'étude (institutionnalisé) *d'oeuvres mathématiques*.

---

* *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33, 1998.

RESUMEN

En este trabajo se hace una reconstrucción del desarrollo de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica partiendo de la problemática del profesor y pasando por el punto de vista clásico en didáctica que sistematiza y generaliza dicha problemática.

Después de sucesivas ampliaciones de la problemática didáctica, cuando una multitud de fenómenos sin explicar y de problemas didácticos sin resolver obligaron a tematizar y modelizar la actividad matemática escolar, emergió la epistemología experimental que, coincidiendo con las primeras formulaciones de la *teoría de las situaciones didácticas,* tomó el nombre de "didáctica fundamental".

En el marco de este nuevo programa de investigación y a partir de la teoría de la transposición didáctica ha surgido el *enfoque antropológico* que, en sus últimos desarrollos, toma el *proceso de estudio* (institucionalizado) de las *obras matemáticas* como objeto primario de investigación.

Introducción

La evolución de la didáctica de las matemáticas está determinada por sucesivas ampliaciones de la *problemática didáctica*. Cada una de estas ampliaciones comporta cambios de su *objeto primario de investigación* y, en consecuencia, modifica la naturaleza de la didáctica como disciplina científica .

En este trabajo intentamos hacer, de una manera forzosamente esquemática, una "*reconstrucción racional*" (Lakatos, 1971) de la evolución de una de las lineas de desarrollo de la problemática didáctica. No pretendemos, por tanto, hacer una descripción exhaustiva de la historia de la didáctica de las matemáticas a lo largo de las últimas décadas.

El "principio metodológico" (o, si se quiere, el prejuicio principal) que guía esta reconstrucción es nuestra convicción de que a principios de los años 70 tuvo lugar una ampliación inesperada de la problemática didáctica (debida principalmente a la inclusión del *conocimiento matemático* como *objeto* ***primario*** de investigación) que cambió la naturaleza de esta disciplina y provocó la emergencia de la *didáctica fundamental*. Es en este marco en el que se reivindicó por primera vez el estatuto de "saber científico" para la didáctica de las matemáticas. Nuestro trabajo pretende, en definitiva, *reconstruir la génesis de la didáctica fundamental*, entendida como el resultado de sucesivas ampliaciones de la *problemática espontánea del profesor*. Además, interpretaremos el *enfoque antropológico* como uno de los desarrollos naturales de la didáctica fundamental.

1. El punto de vista clásico en didáctica de las matemáticas

Antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje dependía sólo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista. Esta es, todavía, la idea dominante en la cultura corriente y representa una "concepción" precientífica de la enseñanza que sigue siendo muy influyente en la cultura escolar.

Esta forma un tanto "mágica" de considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas fue evolucionando a medida que crecía el interés por entender y explicar los hechos didácticos. Así, desde los inicios de la didáctica de las matemáticas como disciplina, fue consolidándose un punto de vista -que denominaremos *clásico*[1]- que rompe con esta visión mágica y considera el aprendizaje en general, y el de las matemáticas en particular, como un *proceso psico-cognitivo* fuertemente influenciado por *factores motivacionales, afectivos* y *sociales*.

Esta manera de interpretar el aprendizaje humano fue tomando cuerpo a través de la obra de diferentes autores (como Piaget, Vygotsky y Bruner, entre otros muchos) a pesar de las importantes diferencias que éstos mantenían entre sí. Es lógico que en la primera etapa del desarrollo de la didáctica, para poder luchar más eficazmente contra la visión precientífica de los hechos didácticos, se tomase la *Psicología Educativa* como fundamento científico y se intentase adaptar al caso de las matemáticas la noción de "aprendizaje" que esta disciplina proporcionaba. En este sentido hay que citar como emblemática la obra principal de Ausubel, no sólo como síntesis crítica de las diversas aportaciones anteriores de la psicología educativa a la explicación del aprendizaje en el aula, sino también por sus aportaciones originales, entre las que destaca la noción de "*aprendizaje significativo*" (Ausubel, 1968). Veremos más adelante que la insuficiencia de esta noción general de "aprendizaje" llevó a elaborar, dentro del enfoque clásico de la didáctica, una noción de "aprendizaje específicamente matemático".

Para analizar estas primeras etapas de la evolución de la problemática didáctica, vamos a dar una descripción general, razonablemente simplificada, del punto de vista clásico en didáctica de las matemáticas. Empezaremos describiendo dicho punto de vista mediante dos características muy generales:

(a) *Toma como problemática didáctica una ampliación limitada de la problemática espontánea del profesor.*

Esto significa que recoge, reformula, amplía y sistematiza las cuestiones que constituyen inicialmente la *problemática del profesor*, las cuales están muy condicionadas por las *ideas dominantes en la cultura escolar*. Entre las cuestiones que constituyen la problemática del profesor podemos citar: el problema de la naturaleza de los conocimientos previos de los alumnos, el problema de la motivación necesaria para el aprendizaje, el problema de los instrumentos tecnológicos de la enseñanza, el problema de la diversidad, el problema de cómo enseñar a resolver problemas de matemáticas y el problema de cómo evaluar a los alumnos, entre otros muchos. Incluso los términos en que se plantean estas cuestiones (como "motivación", "diversidad", "evaluación", etc.) dependen de la cultura escolar dominante que, naturalmente, está muy influenciada por los documentos curriculares y por el discurso de la noosfera. Las posibles "respuestas" imaginables por el profesor a dicha problemática se corresponden siempre con las ideas dominantes que pueden expresarse en forma de eslogans pedagógicos: "Enseñanza personalizada", "Motivación a través de materiales relacionados con la realidad y los intereses de los alumnos",

---

[1] El calificativo de "clásico" que asignamos a este enfoque no tiene, por supuesto, ninguna connotación peyorativa. Se trata del primer enfoque sistemático de los hechos didácticos y a él le corresponde el honor de haber roto por primera vez con la mentalidad precientífica en lo que se refiere al análisis de *lo didáctico*. Sin su valiosa aportación no tendría sentido la evolución de la didáctica como disciplina científica que presentamos aquí. El primer autor que habló del "enfoque clásico" en didáctica fue precisamente Guy Brousseau, caracterizándolo como aquel enfoque que, en la explicación de los hechos didácticos, toma como central la *actividad cognitiva del sujeto* presuponiendo, además, que dicha actividad puede ser descrita y explicada de manera relativamente independiente de los restantes aspectos de la relación didáctica (Brousseau, 1986).

“Utilización de medios informáticos”, “Enseñanza a través de la resolución de problemas”, etc.

(b) *Presenta el saber didáctico como un saber técnico, en el sentido de aplicación de otros saberes más fundamentales importados de otras disciplinas*. Esto comporta considerar la didáctica de las matemáticas como una disciplina más *normativa* que *explicativa.*

Desde este punto de vista clásico, la didáctica de las matemáticas tiene como objetivo primero y principal proporcionar al profesor los recursos profesionales que éste necesita para llevar a cabo su labor de la manera más satisfactoria posible.

1.1. Dos enfoques clásicos: el aprendizaje del alumno y el pensamiento del profesor

Si afinamos un poco más el análisis, podemos distinguir dos enfoques “sucesivos” (aunque *no sean temporalmente sucesivos*) en el desarrollo inicial de la problemática didáctica.

El primer enfoque está centrado en el *aprendizaje del alumno*. Su problemática gira alrededor de la noción ya citada de “*aprendizaje significativo*” en el sentido de Ausubel (Ausubel, 1968) y su objeto *primario* de investigación es el *conocimiento matemático del alumno* y su evolución. Esta elección del objeto de estudio comporta que se delegue explícitamente a la *psicología* la fundamentación científica de las técnicas que la didáctica proporciona.

El segundo enfoque, aunque está centrado en la *actividad docente*, comparte el interés básico por la instrucción del alumno. Este enfoque amplía la problemática didáctica introduciendo cuestiones relativas al profesor y a su formación profesional. Una de las cuestiones centrales de la nueva problemática puede formularse en los siguientes términos: “¿Qué conocimientos (en el sentido amplio de *saber* y *saber hacer*) debe tener el profesor para favorecer un aprendizaje efectivo de los alumnos?” (Gil y otros, 1991).

El objeto *primario* de investigación de este segundo enfoque es el *pensamiento del profesor* que incluye su conocimiento de las matemáticas, su conocimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje y su experiencia en la práctica docente. Se trata de un conjunto de conocimientos “profesionales” cuya construcción y justificación requiere una base multidisciplinar que abarque, además de la *psicología educativa*, la *sociología*, la *historia de las matemáticas*, la *pedagogía* y la *epistemología de las matemáticas*, entre otras disciplinas.

Se postula que la formación del profesor debe empezar por la transformación del “pensamiento docente espontáneo” en un sentido análogo a la necesidad de transformar el pensamiento espontáneo del alumno, sus *preconceptos* y *errores conceptuales*, para posibilitar su aprendizaje. Al tomar el pensamiento del profesor como vía de acceso al análisis de la relación didáctica se origina una cierta confusión o, cuanto menos, un solapamiento entre *saber didáctico* y *saber necesario para enseñar*. Un ejemplo paradigmático de confusión entre ambos tipos de saberes, que responden a dos lógicas distintas, lo encontramos en la “*investigación-acción*”(Brousseau, 1989).

Para caracterizar de una manera global este estadio de la evolución de la problemática didáctica no hay que apelar a la mayor o menor importancia asignada a su fundamentación psicológica ni al hecho de que se centre en uno u otro de los protagonistas de la relación didáctica -ya sea el alumno o el profesor en referencia al alumno-. Lo que es verdaderamente característico del punto de vista clásico en didáctica de las matemáticas es que asume acríticamente que, o bien *los saberes que utiliza no son problemáticos en sí mismos* (como los saberes matemáticos), o bien *no* *forman parte de la problemática didáctica* (como los psicológicos, sociológicos o lingüísticos). En todo caso, dichos saberes sólo pueden ser aplicados para describir e interpretar los hechos didácticos, pero *nunca pueden ser modificados como consecuencia de dicha aplicación.* Esto significa que, al contrario de lo que pasa en cualquier disciplina científico-experimental, cuando se utiliza una noción psicológica como, por ejemplo, la de "aprendizaje significativo", para describir o explicar un hecho didáctico, esta aplicación no tendrá ninguna repercusión importante en la evolución de la teoría psicológica en cuestión. Dicho en otras palabras, mientras que los *hechos físicos* (naturalmente interpretados por la teoría como *fenómenos físicos*) pueden llegar a modificar las nociones construidas por la teoría (como, por ejemplo, la noción de "masa"), no es posible que, en el ámbito de la didáctica clásica, los *hechos didácticos* modifiquen la noción misma de "aprendizaje significativo".

1.2. Limitaciones del punto de vista clásico en didáctica

Destacaremos a continuación tres limitaciones inherentes a este estadio del desarrollo de la didáctica de las matemáticas:

(i) Paradójicamente, y a pesar de centrarse en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el enfoque clásico no incluye entre sus objetos de estudio las nociones de "enseñar matemáticas" ni de "aprender matemáticas", entre otras. Sólo las utiliza como *nociones transparentes* y *no cuestionables*, o bien como nociones construidas en otras disciplinas.

(ii) Al centrar el análisis en el alumno (o en el profesor en referencia al alumno), el enfoque clásico aborda su objeto de estudio de una forma fuertemente condicionada por los *fenómenos psicológicos* involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, al tiempo que tiende a poner en segundo plano los fenómenos específicamente *didáctico-matemáticos*.

Incluso cuando se rechaza partir de una teoría del aprendizaje general, que sea neutral respecto al contenido, y se defiende que la didáctica de las matemáticas debe elaborar una teoría del *aprendizaje matemático*, como propugnan Bauersfeld y Skowronek en la que se ha considerado la carta fundacional del *International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Bauersfeld y Skowronek 1976), se siguen enfatizando los procesos de aprendizaje matemático y el conocimiento matemático *del alumno* como *objetos primarios de investigación.*

Así, por ejemplo, Richard Lesh y Marsha Landau afirman en la introducción de uno de los libros más prestigiosos de los últimos años en el ámbito de la educación matemática, que "*The goals of much of the research reported in this book were: (a) to identify students' primitive conceptualizations of various mathematical ideas and processes (e.g., rational numbers, early number concepts, and spatial-geometric concepts); (b) to investigate similarities and differences between students' conceptual structures associated with these ideas and the formal mathematical structures that characterize them; (c) to describe how these conceptualizations are gradually modified into mature understandings; and (d) to identify factors that influence this development*" (Lesh y Landau, 1983, p. 3).

Y aunque intentan diferenciar este tipo de análisis de los análisis puramente psicológicos ["*These idea analyses are quite distinct from the task analyses and analyses of children's cognitive characteristics that tend to be used in general (i.e. not subject-matter-oriented) psychological research*"], no pueden dejar de reconocer que "*These three types of analyses are clearly interrelated*" (Lesh y Landau, op. cit., p. 3). En la práctica esta interrelación comporta una subordinación y casi una reducción de lo didáctico a lo psicológico.

(iii) Al interpretar el *saber didáctico* como un *saber técnico* (en el sentido de que su justificación hay que buscarla en saberes científicos ajenos a la propia didáctica e independientes entre sí), el enfoque clásico renuncia a la ambición de construir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

En este sentido es interesante observar que autores como Jeremy Kilpatrick, que ha enfatizado con fuerza las necesidades teóricas de la investigación en "educación matemática" ("*As long as we ignore the theoretical contexts of our researh work in mathematics education, it will remain lifelees and ineffective*": Kilpatrick, 1981, p. 26), cita como ejemplo de "trabajo teórico" que ha influido efectivamente sobre el pensamiento del profesor de matemáticas y sobre su práctica educativa, el de autores como E. L. Thorndike, Piaget, Dienes y Gagne. Esto comporta, al menos en primera instancia, que los "constructos teóricos" de la investigación en educación matemática se buscan en saberes científicos ajenos a esta disciplina.

Por su parte Alan H. Schoenfeld subraya la importancia capital de disponer de una teoría: "*One of the major goals, if not the major, of the learning sciences is the construction of a theory of learning*" (Schoenfeld, 1991, p. 35). Pero, ¿en qué saberes científicos hay que fundamentar esa teoría? En su obra más sistemática (Schoenfeld, 1985), este autor considera que los "elementos" básicos para elaborar un marco en el que pueda analizarse la actividad matemática son el "conocimiento de base", las "estrategias heurísticas", las "estrategias de control y gestión" del proceso y el "sistema de creencias". Hay que subrayar que todos estos elementos hacen referencia a la cognición (ya sea a sus aspectos conceptuales o procedimentales, a la "metacognición" o a los aspectos afectivos de la cognición). Este punto de vista ha sido reafirmado por el autor en sus trabajos más recientes.

Así pues, se continúa identificando el proceso de aprendizaje de las matemáticas (o, con más precisión, el proceso de aprender a resolver problemas de matemáticas), con un *proceso psico-cognitivo* fuertemente influenciado por *factores motivacionales y actitudinales.* Resulta, en definitiva que, en el marco del enfoque clásico de la didáctica, la teoría del aprendizaje (también del aprendizaje matemático) se debe fundamentar, en última instancia, en las ciencias cognitivas.

1.3. El mecanismo de ampliación de la problemática didáctica

A fin de superar éstas y otras limitaciones, la didáctica de las matemáticas se ha visto obligada a ampliar su problemática, incluyendo en ella objetos que hasta ese momento habían sido considerados como "dados".

El mecanismo mediante el cual la didáctica de las matemáticas amplió drásticamente su problemática no es específico de esta disciplina. Se trata de un mecanismo general que tiene relación con la necesidad que se produce periódicamente en toda disciplina de introducir como objetos de estudio propios, objetos que hasta el momento habían sido utilizados únicamente como herramientas transparentes, no cuestionables y que sólo aparecían en el discurso científico normal como útiles para describir otros objetos.

Si llamamos "*paracientíficos*" a dichos objetos, el mecanismo general de ampliación de una problemática científica podría ser descrito como la transformación en objetos *científicos* de objetos que hasta ese momento habían funcionado como *paracientíficos* en el discurso científico normal.

En el caso de las matemáticas tenemos ejemplos muy conocidos de este fenómeno: los objetos "número real", "función" y "conjunto", entre otros muchos, fueron *paramatemáticos* (esto es, herramientas transparentes útiles para describir y estudiar otros objetos matemáticos) mucho antes de devenir históricamente *objetos matemáticos* (esto es, objetos de estudio en sí mismos, además de herramientas útiles para estudiar otros objetos matemáticos)[2].

La necesidad histórica de cambiar el estatuto de paramatemáticos que tenían dichos objetos para convertirlos en objetos matemáticos de pleno derecho, vino determinada por la presión que ejercían sobre la comunidad una multitud de fenómenos matemáticos inexplicados y de problemas matemáticos no resueltos. La consiguiente *ampliación de la problemática matemática* originada por la irrupción de los nuevos objetos, provocó transformaciones importantes en la naturaleza de las matemáticas como ciencia.

Análogamente, en el caso de la didáctica de las matemáticas ha sido la aparición de multitud de hechos didácticos inexplicados y la falta de respuesta a múltiples cuestiones, los que han provocado la necesidad de cambiar el estatuto de ciertos *objetos paradidácticos* para constituirlos en *objetos didácticos* de pleno derecho, esto es, en objetos de estudio en sí mismos para la didáctica de las matemáticas.

Entre las cuestiones que no pueden abordarse desde el punto de vista clásico citaremos, a título de ejemplo, los siguientes: ¿Cuál es el papel de las "rutinas" en el aprendizaje de las matemáticas? ¿Cómo diferenciar las rutinas de las actividades "creativas"? ¿Qué papel juega o podría jugar la actividad de resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuál es la relación entre el aprendizaje de la "aritmética", el "álgebra elemental" y la "geometría"? ¿Qué significa "adquirir el concepto de proporcionalidad" o "adquirir el concepto de función"? ¿Qué criterios deben utilizarse para diseñar el currículo de matemáticas?

La razón por la cual estas cuestiones no pueden abordarse desde una perspectiva clásica es muy sencilla: para tratar científicamente estas cuestiones es preciso disponer de un *modelo explícito de la actividad matemática escolar* en el que se modelicen, en particular, el "álgebra escolar", la "aritmética escolar", la "geometría escolar", la "proporcionalidad", etc. Asímismo, es necesario disponer de un *modelo del proceso escolar de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* que contenga las nociones de "rutina matemática", "actividad matemática creativa", "resolución de problemas matemáticos", "enseñanza escolar de las matemáticas", etc. como nociones *construidas* en el modelo (no primitivas). Dichas nociones deberían definirse a partir de las nociones *primitivas* del *modelo de la actividad matemática escolar* antes citado, el cual debería jugar el papel de modelo "nuclear". Sólo así sería posible plantear las cuestiones citadas

[2] La noción de *objeto paramatemático* se debe a Chevallard (1985) y es relativa a la institución en la que nos situemos. Así, por ejemplo, podemos decir que "*demostración*", "*parámetro*" y "*ecuación*" son *objetos paramatemáticos* en la enseñanza secundaria porque en esta institución las citadas nociones se utilizan como herramientas transparentes, no cuestionables. No es posible, por ejemplo, que en un examen de secundaria aparezca una pregunta del tipo "¿Qué es una demostración?" o "¿Qué diferencia hay entre un parámetro y una variable?" porque en dichas instituciones las nociones citadas no se toman como objeto de estudio. Pero la noción de "*demostración*", por ejemplo, puede funcionar como un *objeto matemático* en un curso de lógica matemática a nivel universitario.

sin tener que dejar a la psicología cognitiva la responsabilidad de la fundamentación científica última de los análisis didácticos.

Es fácil, asímismo, citar fenómenos didácticos que han permanecido inexplicados durante décadas debido, principalmente, a su transparencia cuando se contemplan desde el punto de vista clásico. Entre éstos se encuentran todos los fenómenos de *transposición didáctica*. Aquí citaremos únicamente algunos fenómenos que pueden formularse, aunque no puedan explicarse, con las nociones didácticas clásicas (para más detalles, Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

***** La "*desalgebrización del currículo de la secundaria obligatoria*", que se manifiesta, entre otras cosas, por la desintegración del corpus de problemas algebraicos, la ausencia del uso sistemático de parámetros, la desaparición progresiva de las justificaciones algebraicas de los procedimientos aritméticos, geométricos o combinatorios y la pobre utilización que se hace de las fórmulas, reduciéndolas a simples algoritmos de cálculo. La descripción, el análisis y la explicación de este fenómeno requiere, en particular, un cuestionamiento, tematización y modelización del *álgebra escolar* que, por definición, está ausente en el enfoque clásico de la problemática didáctica.

***** La "*irresponsabilidad matemática de los alumnos*", que se pone de manifiesto en la gran dificultad que tienen los alumnos para responsabilizarse de las respuestas que dan a las cuestiones matemáticas que se les plantean. Éste es un fenómeno que tradicionalmente se englobaría en la problemática de la "motivación del alumno", preconizándose explicaciones (y soluciones) de naturaleza psicológica, psicoafectiva y pedagógica. En el marco del nuevo paradigma de la *didáctica fundamental*, sin embargo, el fenómeno puede analizarse en términos del *contrato didáctico* y de la *devolución de una situación adidáctica* que, en última instancia, hacen referencia al conocimiento matemático que la situación caracteriza.

***** La "*atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas*", que es una tendencia cada vez más acentuada hacia la transformación del proceso de enseñanza en un conjunto desestructurado de actividades independientes entre sí, en el seno del cual se tratan los problemas matemáticos como "anécdotas" aisladas y en el que el trabajo sistemático y disciplinado y los objetivos a medio y largo plazo tienden a desaparecer. De nuevo, la mera descripción de este fenómeno requiere la utilización de un modelo de la *estructura del proceso de enseñanza de las matemáticas* y una caracterización de lo que se entiende por "*actividad matemática atomizada*" que están ausentes en el enfoque clásico.

***** La "*aritmetización del álgebra escolar*", esto es, la fuerte dominancia en la cultura escolar de una forma simplista de interpretar el álgebra elemental como *aritmética generalizada*. En otro lugar hemos dado una primera interpretación de este fenómeno didáctico (Gascón, 1994) basada, naturalmente, en un *modelo específico del álgebra escolar* y en el análisis de las restricciones que impone el modelo del álgebra escolar (y, consiguientemente de su enseñanza) dominante en la institución escolar.

***** La "*algebrización del cálculo diferencial escolar*" que se manifiesta en una enseñanza del cálculo esencialmente "algebraica", en tratar el paso al límite como un proceso algebraico "finito" y, en definitiva, en un intento escolar de reducir las técnicas específicas del análisis, en las que prima la utilización de condiciones suficientes, a maneras de hacer puramente algebraicas centradas en el uso de equivalencias sucesivas (Artigue, 1995). De nuevo nos encontramos con un fenómeno cuyo mera detección ha requerido la utilización, como instrumentos básicos, de sendos modelos específicos del *álgebra* y del *cálculo diferencial escolares*. Postulamos que la profundización en el análisis de este fenómeno y su eventual explicación dependerán de la explicitación de dichos modelos y del estudio sistemático de las restricciones que impone el proceso de estudio de (la reconstrucción escolar de) dichas obras.

2. Didáctica fundamental: la didáctica de las matemáticas como epistemología experimental

Las anteriores cuestiones sin respuesta, así como éstos fenómenos inexplicados, junto a muchos otros, sólo pueden ser abordados científicamente si ciertos objetos ("problema de matemáticas", "enseñar matemáticas", "aprender matemáticas", "concepto matemático", "rutina matemática", "actividad matemática creativa", "proporcionalidad", "número decimal", "función", "álgebra elemental", "aritmética", "geometría", entre otros muchos) que funcionaban tradicionalmente como transparentes (paradidácticos), pasan a ser objetos de estudio en sí mismos, esto es, se convierten en *objetos didácticos*, integrantes de pleno derecho de la problemática didáctica.

Ello comporta la necesidad para la didáctica de disponer de un *modelo de la actividad matemática* y de un *modelo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas* en el que dichos objetos puedan estar debidamente representados. No se trata de una necesidad nueva, sino del reconocimiento de una necesidad que es inherente a toda investigación científica. De hecho, todo análisis didáctico utiliza inevitablemente ciertos modelos más o menos implícitos, aunque el investigador no sea consciente de ello ni, por tanto, del grado de dependencia de los mismos.

El nuevo punto de vista en didáctica de las matemáticas, la *didáctica fundamental*, nació precisamente cuando Brousseau vislumbró por primera vez la necesidad para la didáctica de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, dado que los modelos epistemológicos usuales no habían sido construidos para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica. Históricamente se corresponde con las primeras formulaciones de la *teoría de las situaciones didácticas*, cuyo texto fundador fue publicado a principios de los años 70 (Brousseau, 1972). En esto consiste, precisamente, el principio metodológico fundamental de la teoría de las situaciones: definir un "*conocimiento matemático*" mediante una "*situación*", esto es, por un autómata que modeliza los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima (Brousseau, 1994).

Con más precisión, se llama *situación fundamental* (correspondiente a un conocimiento matemático concreto C) a un conjunto minimal de *situaciones adidácticas* (específicas de C) que permiten engendrar, por manipulación de los valores que toman sus *variables didácticas*, un campo de problemas suficientemente extenso como para proporcionar una buena representación de C en relación a cómo ha sido reconstruido C en la institución didáctica en cuestión. Tenemos así que, en la teoría de situaciones, la *actividad matemática escolar* se modeliza a partir de la noción de "situación fundamental" y es también con ayuda de dicha noción como, en cada caso, se define "*aprender un conocimiento matemático C*" en una institución didáctica determinada (para más detalles, ver el **Anexo D**, en Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Además de constituir una importantísima ampliación de la problemática didáctica, este punto de vista sitúa dicha problemática en el marco de la *epistemología de las matemáticas*, sin que ello comporte ninguna pérdida de autonomía de la didáctica como disciplina. De hecho esta reformulación del objeto de la didáctica no sólo origina una ampliación inesperada de ésta sino que, al mismo tiempo, acabará forzando una drástica ampliación del objeto de estudio de la epistemología de las matemáticas, tal como explicaremos más adelante. De esta forma, la didáctica de las matemáticas no se encierra dentro de la epistemología, entendida como estudio de la génesis y la estructura del conocimiento matemático, sino que se abre al estudio de la dimensión didáctica de todos los tipos de manipulación institucional de las matemáticas, asumiendo nuevas responsabilidades científicas. En particular, desde el punto de vista de la didáctica fundamental, los didácticos deben asumir la responsabilidad de elaborar y contrastar empíricamente los modelos de la actividad matemática que forzosamente utilizan.

Uno de los rasgos esenciales de este punto de vista en didáctica consiste precisamente en tomar la actividad matemática en sí misma y, más en concreto, la *actividad matemática escolar*, como ***objeto primario*** de estudio. Este es el origen de la denominación de "*epistemología experimental*" que Brousseau dió inicialmente a la didáctica de las matemáticas. Esto comporta, en particular, que "enseñar matemáticas" y "aprender matemáticas" dejen de tener el carácter de *objetos primarios* de investigación para pasar a ser *secundarios* (lo que no quiere decir que sean menos importantes), porque son definidos (o construidos) a partir de los términos primitivos del modelo epistemológico-didáctico en cuestión.

De esta forma, no sólo es posible empezar a abordar cuestiones que antes no se podía ni siquiera plantear, sino que, lo que es más importante, se pone de manifiesto que *todo fenómeno didáctico* (en el sentido tradicional de fenómeno relativo a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas*) tiene un componente matemático esencial*, inaugurándose una nueva vía de acceso al análisis de los fenómenos didácticos (el propio conocimiento matemático) así como un *nuevo programa de investigación* (Lakatos, 1978) en didáctica de las matemáticas: la ***didáctica fundamental***.

2.1. El enfoque antropológico como desarrollo de la didáctica fundamental

En el marco de la didáctica fundamental pronto se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la *matemática escolar* ni la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución de producción del saber matemático. Ésta es una de las primeras aportaciones de la teoría de la *transposición didáctica* (Chevallard, 1985). El desarrollo de esta teoría ha mostrado que las diferentes formas de manipulación social de las matemáticas no pueden ser estudiadas separadamente (Chevallard, 1990). En otro lugar hemos aportado argumentos para justificar porqué no pueden separarse completamente el estudio de la génesis y el desarrollo del saber matemático, del estudio de la enseñanza y la utilización de dicho saber (Gascón, 1993).

Resulta, en definitiva, que los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas sólo pueden abordarse científicamente si se tienen en cuenta simultáneamente los fenómenos de transposición didáctica que, a su vez, no pueden separarse de los fenómenos relativos a la producción de las *obras matemáticas* (ver la sección **2.2.**). La actividad matemática escolar se integra así inseparablemente en la problemática mucho más amplia de las *actividades matemáticas institucionales* (ver la sección **2.3.**), las cuales pasan a constituir el nuevo y más extenso ***objeto primario*** de la investigación didáctica.

Surge así una definición más general de didáctica de las matemáticas como "*ciencia de las condiciones específicas de la difusión (impuesta) de los saberes matemáticos útiles a las personas y a las instituciones humanas*" (Brousseau, 1994), que amplía el ámbito de estudio de la didáctica mucho más allá de las *instituciones escolares* para abarcar todas aquellas instituciones en las que tiene lugar algún tipo de manipulación de los conocimientos matemáticos.

En este marco de la didáctica fundamental, y como una consecuencia natural del desarrollo de la teoría de la transposición didáctica, ha surgido el *enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas* (Chevallard, 1992). Este enfoque propugna que la actividad matemática debe ser interpretada (esto es, modelizada) como una *actividad humana* junto a las demás, en lugar de considerarla únicamente como la construcción de un *sistema de conceptos,* como la utilización de un *lenguaje* o como un *proceso cognitivo*. De esta manera el enfoque antropológico integra muchos enfoques parciales (epistemológicos, lingüísticos, psicológicos, sociológicos, ...).

Así, mientras que los enfoques clásicos de la didáctica de las matemáticas se desarrollaron principalmente a la sombra de modelos psicológicos del aprendizaje (conceptualistas, psicolingüísticos o cognitivistas), el enfoque antropológico precisará de un *modelo de las matemáticas institucionales* que incluya la *matemática escolar* como un caso particular y de un modelo de las *actividades matemáticas institucionales* que incluya la *enseñanza-aprendizaje escolar de las matemáticas*, como una actividad matemática institucional particular. Este paso, de la institución escolar a cualquier institución en la que se manipulen conocimientos matemáticos, con la consiguiente inclusión de los fenómenos *de transposición didáctica*, constituye la última de las ampliaciones de la problemática didáctica. Esta generalización del objeto de investigación es, por tanto, otra de las aportaciones del enfoque antropológico en relación a las primeras formulaciones de la didáctica fundamental.

2.2. La noción de obra matemática: elementos y estructura

En los últimos desarrollos del enfoque antropológico (Chevallard, 1996) se modeliza la *matemática institucional* mediante la noción de *obra matemática*. No se dice lo que "es" una obra matemática, pero se propone un modelo de su estructura a partir de los elementos que la constituyen.

Se postula que una obra matemática, como toda obra humana, surge siempre como respuesta a un conjunto de *cuestiones* y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta *institución*, determinadas *tareas problemáticas.*

> Así, por ejemplo, podemos considerar la obra matemática que responde, entre otras, a cuestiones del tipo: "¿Cómo obtener determinado objeto al menor precio posible?", "¿Cómo alcanzar el mayor efecto posible con un determinado esfuerzo?", "¿Cómo efectuar el máximo trabajo dentro de un tiempo dado?", "¿Cómo obtener el máximo beneficio corriendo el mínimo riesgo?", "¿Cómo construir una máquina que gaste el mínimo de energía para llevar a cabo cierto trabajo?", "¿Cómo construir un recipiente cilíndrico de determinado volumen minimizando el gasto de materia prima?", etc. Se trata de cuestiones que de una u otra forma se plantean en la institución escolar.

Las cuestiones y las tareas problemáticas a las que responde una obra matemática acaban cristalizando en uno o más ***tipos de problemas***, aunque inicialmente sólo se disponga de algunos problemas concretos del campo. A medida que la actividad matemática avanza, y siempre que los problemas no se traten como anécdotas aisladas (o "adivinanzas"), es la propia actividad la que genera uno o más tipos de problemas.

> En la obra matemática que estamos considerando aparecen problemas tales como: “Dada una recta **r** en el plano y dos puntos **A** y **B** situados en el mismo semiplano respecto a **r**, buscar el punto **X** de **r** tal que el ángulo **AXB** sea máximo”, “De entre todos los triángulos que tienen un lado de longitud dada y un perímetro dado, ¿cuál es el que tiene área máxima?”, “De entre todos los rectángulos de área dada, cuál es el que tiene el perímetro mínimo?” Se trata de problemas que pueden ser planteados en la enseñanza escolar de las matemáticas.

Si afirmamos que los problemas citados forman, junto a otros muchos, *un tipo de problemas* no es porque tengan enunciados más o menos parecidos (en todos ellos la incógnita es en un objeto “óptimo” en algún sentido), sino porque existe una ***técnica matemática*** (no algorítmica, como en la mayoría de los casos) capaz de abordarlos y de generar muchos más problemas del mismo tipo.

> Para abordar los problemas anteriores existe, por ejemplo, la **técnica de la linea de nivel tangente a la trayectoria** (Polya, 1954). Se trata de una técnica que no utiliza el cálculo diferencial y que, por razones que analizaremos más adelante, no forma parte del currículo escolar (para hacerse cargo del funcionamiento de esta técnica, puede consultarse el **ANEXO** de este trabajo).

Ninguna técnica puede “vivir” con normalidad en una institución si no aparece en ésta como una manera de hacer a la vez correcta, comprensible y justificada. La existencia de una técnica supone, por tanto, que exista en su entorno un *discurso interpretativo y justificativo de la técnica* así como de su *ámbito de aplicabilidad o validez.* Llamamos a este discurso sobre la técnica una ***tecnología*** (de *tékhne*, técnica y *logos*, discurso). Además de justificarla y hacerla inteligible, la tecnología tiene la importante función de aportar elementos para modificar la técnica con el fin de ampliar su alcance, superando así sus limitaciones y posibilitando la *producción de nuevas técnicas.*

> En nuestro ejemplo, el elemento fundamental de la tecnología asociada a la técnica de la "línea de nivel tangente a la trayectoria", lo constituye el **teorema de los multiplicadores de Lagrange.** Incluso podría decirse que la técnica descrita constituye una "interpretación geométrica" del sistema de Lagrange. El hecho de que esta tecnología no tenga cabida en la enseñanza secundaria de las matemáticas podría explicar, en parte, la ausencia de la técnica de la “línea de nivel” en dicha institución (a pesar de que permite resolver muchos problemas planteables de manera natural pero irresolubles mediante la técnica que se enseña en secundaria). En el caso de la enseñanza universitaria, la técnica de la “línea de nivel” no puede vivir con normalidad porque tendría que competir con la propia técnica analítica de los multiplicadores de Lagrange que es mucho más potente y general.

Otros elementos que también forman parte de la tecnología asociada a una técnica son las proposiciones que describen su alcance, su relación con otras técnicas, sus posibles generalizaciones (por ejemplo, del plano al espacio) y las causas de sus limitaciones (Gascón, 1989).

La tecnología asociada a una técnica es, en general, un discurso matemático que, como tal, requiere a su vez una interpretación y justificación institucional. Llamamos ***teoría asociada a una técnica*** a la *tecnología de su tecnología*, esto es, a un “discurso” matemático suficientemente amplio como para justificar e interpretar la tecnología de dicha técnica (junto a la de muchas otras). Mientras que la tecnología asociada a una técnica tiende a ocupar una posición cercana a ésta y aparece con cierta frecuencia en las prácticas matemáticas en las que se utiliza dicha técnica, la teoría, por contra, suele mantenerse a mayor distancia de la práctica matemática, y acostumbra a estar "ausente" de la misma.

> La teoría asociada a la técnica de la "línea de nivel tangente a la trayectoria" estará así contenida en la teoría de la diferenciación de funciones reales de varias variables.

Podemos decir, en resumen, que la matemática institucionalizada y, en particular, la matemática escolar, se organiza en obras matemáticas que son conjuntos estructurados de objetos matemáticos que surgen como respuesta a ciertas cuestiones planteables en el seno de dicha institución. Las obras matemáticas son así el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la *práctica matemática* que consta de *tareas* (materializadas en ***tipos de problemas)*** y ***técnicas*** útiles para llevar a cabo dichas tareas, y el *discurso razonado sobre dicha práctica* que está constituido por dos niveles, el de las ***tecnologías*** y el de las ***teorías***. Estos son, en definitiva, los elementos constitutivos de toda obra matemática.

Lo anterior no significa que el carácter "práctico" o "teórico" de un objeto matemático sea intrínsico al mismo. Por contra, hay que subrayar que un mismo objeto, como por ejemplo el sistema de Lagrange, puede formar parte de una actividad "práctica" (puede utilizarse directamente para resolver un problema de máximos y mínimos condicionados) o, en otra organización institucional, puede jugar el papel de elemento "teórico" que puede justificar, en última instancia, una práctica matemática, pero manteniéndose muy alejado de ella. Resulta, en definitiva, que el carácter "teórico" o "práctico" de un objeto matemático depende, en cada institución y en cada actividad matemática concreta, de la *función* que dicho objeto desempeñe.

Lo dicho hasta aquí pone de manifiesto además que, lejos de ser independientes, los elementos constitutivos de una obra matemática están fuertemente interrelacionados entre sí: el desarrollo de las *técnicas* genera nuevos *tipos de problemas* y provoca nuevas necesidades *tecnológico-teóricas*. Éstas, a su vez, permiten *modificar las técnicas* ya establecidas, *interrelacionarlas con otras*, *generar nuevas técnicas* y, en definitiva, plantear y abordar nuevos *tipos de problemas*[3].

2.3. Modelo del proceso de estudio de una obra matemática

Ya hemos dicho que en el enfoque antropológico, el objeto primario de investigación didáctica lo constituyen las ***actividades*** *matemáticas institucionales* que se modelizan mediante la noción de *proceso de estudio de una obra matemática en el seno de una institución.*

Los *estudiantes* (esto es, los sujetos de la institución inmersos en un proceso de estudio) no tienen porqué ser alumnos; también pueden ser investigadores de matemáticas, biólogos, químicos, economistas e incluso músicos o pintores que se plantean cuestiones matemáticas para utilizar las respuestas en su trabajo. También puede tratarse, claro está, de profesores que estudian matemáticas en el marco de su

---

[3] Para una descripción más detallada de la estructura de una obra matemática se puede consultar Chevallard, Bosch y Gascón, 1997. Al considerar simultáneamente los dos aspectos de una obra ("praxis" y "logos") tenemos la noción de "*praxeología matemática*".

actividad docente. En este sentido la noción de *proceso de estudio* contiene ampliamente la noción clásica de *proceso de enseñanza-aprendizaje*: mientras que la *enseñanza* es sólo un medio (a veces poderoso, pero nunca el único) para el *estudio*, el *aprendizaje* es el efecto perseguido por el *estudio* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

El enfoque antropológico postula que el proceso de estudio no es homogéneo sino que está estructurado en diferentes *momentos*. Cada momento del proceso de estudio hace referencia a una *dimensión o aspecto de la actividad matemática* más que a un periodo cronológico preciso; por tanto, los momentos están distribuidos de una manera dispersa a lo largo del proceso de estudio y no pueden ser vividos "de una vez por todas".

En una primera aproximación, el proceso de estudio de una obra matemática puede describirse, aunque de una forma inevitablemente simplificada, relacionando cada momento con los diferentes elementos (tipos de problemas, técnicas, tecnologías y teorías) que constituyen dicha obra.

Denominamos momento del ***primer encuentro*** a aquel que hace referencia a los objetos que permiten enunciar problemas de un cierto tipo. La función principal de este momento es la de "hacer existir" dichos objetos para los estudiantes, lo que provoca la emergencia para éstos de un campo de problemas que, en principio, tiene una existencia únicamente virtual y está muy mal delimitado.

> El momento del primer encuentro con los problemas de máximos y mínimos tiene lugar, en la organización matemática escolar de la Enseñanza Secundaria[4] en las aplicaciones de la noción de derivada de una función real de variable real. En este caso los problemas de máximos y mínimos existen para los estudiantes de Secundaria únicamente dentro del "estrecho" mundo de las funciones de una variable.

Al momento del primer encuentro le sigue, funcionalmente, el ***momento exploratorio*** que tiene como primera función que el estudiante utilice el *pensamiento conjetural o plausible* (Polya, 1954) con prioridad al pensamiento lógico, en la búsqueda de alguna manera de enfrentarse con los problemas. La segunda función del momento exploratorio consiste en permitir que el estudiante llegue a tratar con problemas concretos del campo y a utilizar efectivamente una técnica matemática para resolverlos. La actividad matemática que se lleva a cabo en el momento exploratorio tiene un carácter de conocimiento "en acto", esto es, no presupone que el estudiante sea capaz de explicitar la técnica que está utilizando ni, mucho menos, que esté en condiciones de justificarla.

Las funciones del momento exploratorio son, así, perfectamente compatibles con una actividad matemática *dubitativa y rígida* y, por tanto, son insuficientes. La actividad matemática exploratoria conlleva errores y bloqueos que los estudiantes sólo pueden superar familiarizándose con las técnicas y fortaleciendo su *dominio* de las mismas.

> En el caso de los problemas de máximos y mínimos tal como se estudian en la enseñanza secundaria, podemos decir que *el momento exploratorio está prácticamente ausente.* Ello es debido a que la única técnica que aparece en la organización escolar es casi algorítmica (puesto que, explícitamente, se reduce a la resolución de la ecuación de

[4] Se toma como ejemplo el proceso de estudio de los problemas de máximos y mínimos, tal como se lleva a cabo en la Enseñanza Secundaria ***española***.

> puntos críticos de una función) y viene dada de antemano. No hay ningún vestigio de ninguna otra técnica (en particular no aparece ni puede aparecer la *técnica de la linea de nivel tangente a la trayectoria* ni otras técnicas clásicas independientes del cálculo diferencial) y los aspectos menos algorítmicos de la técnica que se utiliza (esto es, la *modelización del problema* mediante una función de una variable que hay que optimizar) no son tomados en consideración como "maneras de hacer matemáticas", esto es, como técnicas que habría que explorar, practicar y llegar a dominar.

Llamamos momento del ***trabajo de la técnica*** al que completa, en el sentido indicado, al momento exploratorio. Sus funciones principales apuntan a que el estudiante llegue a tener un *dominio robusto* de las técnicas previamente exploradas, pueda llegar a *explicitar la técnica* que está utilizando, lleve a cabo *pequeñas variaciones* de la misma, *relaciona diversas técnicas* y, en última instancia, pueda llegar a *producir nuevas técnicas* (respecto a la cultura matemática del grupo).

El momento del trabajo de la técnica es, por tanto, un momento muy importante del proceso de estudio pero, paradójicamente, *las instituciones didácticas actuales no disponen de ningún dispositivo en el cual este momento pueda vivir y desarrollarse de una manera normal* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

> En el caso particular del estudio de los problemas de máximos y mínimos tal como éste se lleva a cabo en la enseñanza secundaria, tampoco se pretende que el alumno llegue a tener un dominio robusto de la técnica escolar habitual ni, mucho menos, que llegue a producir técnicas nuevas.
>
> Sería posible imaginar, sin embargo, una organización matemática escolar en la cual tuviese cabida la *técnica de la línea de nivel tangente a la trayectoria* y en la cual existiera un dispositivo didáctico que posibilitara que los estudiantes alcanzasen un dominio robusto de la misma. En ese "mundo posible" sería previsible que el desarrollo de la técnica de "la línea de nivel" permitiese producir una nueva técnica, *la técnica de "variación parcial"* (Polya, 1954) que tampoco requiere la utilización del cálculo diferencial pero que permite abordar problemas de un campo mucho más amplio.

Como ya hemos dicho, la aparición de una nueva técnica, comporta que ésta aparezca como "correcta", "justificable" e "interpretable" en la institución de referencia. Estas necesidades institucionales también se manifiestan a nivel del proceso de estudio de una pequeña comunidad (incluso en el caso límite de un sólo estudiante) que, después de producir una técnica nueva (respecto de la cultura matemática del grupo) fruto de un trabajo más o menos guiado, necesitan vivir ***momentos tecnológico-teóricos*** a fin de integrar ambos niveles de justificación de la práctica matemática.

Los momentos de ***institucionalización*** y ***evaluación***, por fin, considerados como dimensiones o aspectos del proceso de estudio de una obra matemática en el seno de una institución, no deben ser confundidos con la institucionalización y la evaluación escolares que no son más que formas muy particulares de materializar dichas dimensiones. Todo "estudiante" de matemáticas (sea investigador, alumno, profesor, científico que utiliza las matemáticas, etc.) vive momentos de "institucionalización" y de "evaluación" a lo largo de su proceso de estudio[5].

---

[5] La primera exposición, aunque muy esquemática, de los momentos del proceso de estudio de una obra matemática, se encuentra en Chevallard, 1996. Para un análisis más detallado de la teoría de los momentos didácticos y para empezar a relacionar las nociones de "*praxeología matemática*" y "*praxedología didáctica*", se puede consultar Chevallard, Bosch y Gascón, 1997.

3. La didáctica de las matemáticas como ciencia del "estudio"

Podríamos decir, en resumen, que el paso del punto de vista clásico a la ***didáctica fundamental*** inaugura un nuevo *programa de investigación* en didáctica de las matemáticas (Lakatos, 1978) que, aunque modifica el objeto primario de investigación, abarca ampliamente toda la problemática didáctica clásica, puesto que permite reformular sus problemas y plantear y abordar muchos más. Surgió como consecuencia del descubrimiento de que *todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial*. Este descubrimiento trajo consigo la ampliación inesperada del objeto de investigación de la didáctica, incluyendo las prácticas matemáticas escolares no como un objeto más entre otros, sino como el ***objeto primario de investigación*** de cuyo estudio dependen, en cierta forma, todos los demás.

La problemática didáctica se situaba así en el marco de la epistemología de las matemáticas provocando, simultáneamente, una *antropologización de la epistemología* para dar cabida al "estudio del hombre haciendo matemáticas". Surge así la *antropología de las matemáticas* como ampliación de la tradicional "epistemología de las matemáticas" que sólo se ocupaba de la producción de los conocimientos matemáticos. En el seno de esta antropología de las matemáticas emerge la (antropología) didáctica de las matemáticas (Chevallard, 1990).

Desde ese momento fue posible empezar a recorrer el camino inverso: partir del hombre haciendo matemáticas para constatar que lo didáctico es denso en lo matemático y que *todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial*. Este es el camino que ya hace unos años ha empezado a recorrer el enfoque antropológico en el marco de la didáctica fundamental. Sólo así ha sido posible descubrir no sólo que es insuficiente considerar al estudiante como "*sujeto cognitivo*", sino que tampoco basta tomarlo como "*sujeto epistémico*" (en el sentido estrecho de la epistemología clásica); es preciso abarcar toda la complejidad del "*sujeto didáctico*" (Artigue, 1990). En el enfoque antropológico esta necesidad de abarcar todas las sujeciones del sujeto didáctico se satisface postulando que la relación del estudiante a una obra matemática puede ser reconstruida a partir de las relaciones institucionales a dicha obra del conjunto de todas las instituciones (no únicamente escolares) a las que el estudiante está sujeto.

El enfoque antropológico toma como objeto primario de investigación el *proceso (institucionalizado) de estudio de una obra matemática*. Abreviadamente podemos decir que, desde este punto de vista, la didáctica es la ***ciencia del estudio***[6] (incluyendo la *ayuda al "estudio"*) de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir, caracterizar y explicar (pero también diseñar, ayudar a gestionar y evaluar) los procesos de estudio de las comunidades que se ven llevados a estudiar matemáticas en el seno de ciertas instituciones.

Tenemos, en resumen, que el paso del *punto de vista clásico* a la *didáctica fundamental* constituye lo que Lakatos denomina un "*cambio progresivo de problemática*", con el consiguiente *aumento del "poder heurístico*" del nuevo programa de investigación (Lakatos, 1978). Este aumento viene corroborado por la aparición de nuevos problemas, de nuevas teorías auxiliares y con la anticipación de hechos y

---

[6] Para entender el alcance de la noción de "*estudio*" tal como aquí se utiliza, no hay que olvidar que en los últimos desarrollos del enfoque antropológico toda actividad matemática institucional se modeliza mediante la noción de ***proceso de estudio de una obra matemática (en el seno de dicha institución).***

fenómenos nuevos. A fin de ejemplificar algunos de los elementos que ponen de manifiesto este aumento de “poder heurístico”, distinguiremos entre el nivel de investigación didáctica básica y el nivel de ingeniería didáctica:

(i) A nivel de *investigación didáctica básica*, el enfoque antropológico permite reformular nociones de la didáctica fundamental tan importantes como las de *transposición didáctica* (que, en lugar de referirse a la transposición de las “nociones matemáticas” o de los “objetos matemáticos”, en adelante versará sobre la transposición de las “obras” matemáticas), y *obstáculo epistemológico*, que pasa ahora a referirse a obstáculos en el “proceso de estudio de una obra matemática” y que ahora podrán ser descritos en base a los cambios (necesarios) de actividad matemática que comporta todo proceso de estudio.

Este enfoque permite, además, abordar muchos problemas didácticos como, por ejemplo, el “problema del diseño del currículo de matemáticas”, que no eran planteables sin salirse del ámbito escolar. Digamos, por último, que gracias al enfoque antropológico es posible describir y empezar a explicar muchos fenómenos didácticos que habían pasado inadvertidos durante años (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

(ii) A nivel de *ingeniería didáctica*, el enfoque antropológico proporciona los instrumentos para analizar, por ejemplo, la estructura y las funciones de los actuales *dispositivos didácticos escolares* (“clase de matemáticas”, “clase de teoría”, “clase de problemas”, “libro de texto”, “dispositivos de evaluación”, etc.). Este análisis ha permitido constatar y, en cierto sentido, explicar la *pobreza de dispositivos didácticos escolares* actuales, así como algunas de sus consecuencias.

En un sentido más general, el enfoque antropológico permite simplificar el análisis didáctico previo al diseño de una ingeniería didáctica, centrándolo inicialmente en dos polos: el análisis de la *relación institucional* a la obra matemática involucrada en el problema didáctico estudiado y el análisis del *modelo didáctico específico* dominante en la institución escolar, esto es, lo que se (sobre)entiende en dicha institución por “enseñar y aprender” la obra matemática en cuestión. Lo anterior no significa que el enfoque antropológico elimine los análisis cognitivos preliminares relativos a las *concepciones de los estudiantes* y los análisis de los *obstáculos* que condicionan su evolución; significa únicamente que dichos análisis *no se consideran independientes* del análisis *epistemológico* de la obra enseñada, del análisis de la *reconstrucción escolar de dicha obra* y del análisis del *proceso de estudio* de la misma, tal como se lleva a cabo en la institución didáctica considerada. El enfoque antropológico pretende entonces *integrar* todos esos análisis parciales sin dejar de considerar a las prácticas matemáticas escolares (esto es, a la relación institucional a las obras matemáticas) como el *objeto primario de investigación didáctica* de cuyo análisis dependen, en cierta forma, todos los demás. El resto de los análisis didácticos pasan a ser *secundarios* (en el sentido de “no primarios”), aunque no por ello sean menos importantes.

En adelante la didáctica de las matemáticas puede seguir siendo considerada como la *ciencia de los fenómenos y los procesos didácticos*, con la condición de que ***“didáctico”*** se entienda como ***“relativo al estudio de las matemáticas”.***

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL D.P. (1968): *Educational Psychology: A Cognitive View*, Holt, Rinehart and Winston: New York.

ARTIGUE M. (1990): Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, 2.3, 241-286.

ARTIGUE M. (1995): La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica: México, pp. 97-140.

BAUERSFELD H., y SKOWRONEK H. (1976): Research Related to the Mathematical Learning Process, en Athen y Kunle, (eds.), 231-245.

BROUSSEAU G. (1972): Processus de mathématisation. La Mathématique à l'Ecole Élémentaire, 428-442, APMEP: Paris.

BROUSSEAU G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 33-115.

BROUSSEAU G. (1989): La tour de Babel, IREM, Université de Bordeaux I.

BROUSSEAU G. (1994): Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, *ICMI Study 94*.

CHEVALLARD Y. (1985*): La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1990): Didactique, anthropologie, mathématiques, Postfacio a la segunda edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage: Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1992): Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées pau une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

CHEVALLARD Y. (1996): La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique, en R. Noirfalise et M-J. Perrin-Glorian (coord.), *Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Saint-Sauves d'Auvergne, 1995), 83-122.

CHEVALLARD Y., BOSCH M. y GASCON J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.

GASCON J. (1989): *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

GASCON J. (1993): Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 13/3, 295-332.

GASCON J. (1994-95): Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée", *Petit x*, 37, 43-63.

GIL D., CARRASCOSA J., FURIO C. y MTNEZ-TORREGROSA J. (1991*): La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*, ICE/Horsori: Barcelona.

KILPATRICK J. (1981): The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education, *For the Learning of Mathematics*, 2.2, 22-29.

LAKATOS I. (1971): *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Tecnos: Madrid, 1974.

LAKATOS I. (1978): *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press: Cambridge.

LESH R. y LANDAU M., eds., (1983): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press: New York.

POLYA G. (1954): *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton University Press: Princeton (2 vols.)

SCHOENFELD A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*, Academic Press: Orlando, Florida.

SCHOENFELD A. H. (1991): On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to?, Paper presented at a *Symposium on methods at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Chicago, April 1991.

A N E X O

LA TÉCNICA DE LA LINEA DE NIVEL TANGENTE A LA TRAYECTORIA

La puesta en acción de esta técnica requiere las siguientes tareas elementales, ninguna de las cuales es algorítmica porque todas poseen cierto grado de indeterminación:

1. Reducir el problema a la obtención de un punto, es decir, reducir la construcción del objeto incógnita (que puede representarse mediante un objeto geométrico) a la *construcción de un punto*. A partir de este momento podremos suponer que la incógnita "es" un punto.

2. Expresar la *función a optimizar* como una función del plano en el conjunto de números reales. Se trata de una función **f(x,y) = z** que a cada punto **P = (x,y)** del plano le hace corresponder un número real **z.** Los puntos buscados son los extremos de esta función de dos variables.

3. Dibujar las *lineas de nivel* correspondientes a la función a optimizar. Se trata de las curvas $\mathbf{C^k}$ del plano sobre las que la función a optimizar es constante.

$$\mathbf{C^k = \{(x,y)/\ f(x,y)=k\}}$$

4. Dibujar la *trayectoria* del problema, es decir la curva del plano **g(x,y)=0** sobre la cual (según la condición del problema) deben estar situados los puntos solución.

5. Buscar los puntos en los que alguna *curva de nivel* sea *tangente a la trayectoria*. Estos puntos son las únicas posibles soluciones del problema.

6. Comprobar para cada uno de los puntos obtenidos si proporciona una solución del problema y, en ese caso, construir el correspondiente *objeto solución* que verifica la propiedad extremal indicada.

A fin de mostrar el funcionamiento de esta técnica matemática, la aplicaremos a los dos primeros problemas enunciados anteriormente en la sección **2.2.**:

> ***"Dada una recta r en el plano y dos puntos A y B situados en el mismo semiplano respecto a r, buscar el punto X de r tal que el ángulo AXB sea máximo"***

1. En este caso la *reducción a un punto* es clara, puesto que la incógnita es precisamente un punto.

2. La *función a optimizar* hace corresponder a cada punto **P(x,y)** del plano la amplitud del ángulo **APB** (ver fig. 1).

3. Las *curvas de nivel* son las circunferencias que pasan simultáneamente por **A** y

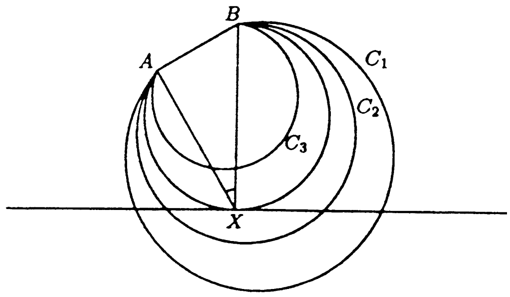

Fig. 1

4. por **B**, dado que, si **P** varía en una de dichas circunferencias, todos los ángulos **APB** tienen la misma amplitud porque son ángulos inscritos a una misma circunferencia y abarcan el mismo arco.

5. La *trayectoria* es, en este caso, la recta **r** dada.

6. Las posibles soluciones vendrán determinadas por los puntos de tangencia de la recta **r** con las circunferencias que pasan por **A** y **B**. En general hay dos circunferencias que pasando por **A** y **B** son tangentes a la recta **r**. Dado que los centros de estas circunferencias deben equidistar simultáneamente de los puntos **A** y **B** y de la recta **r**, se obtendrán como intersección de la mediatriz del segmento **AB** con las parábolas de directriz **r** y focos respectivos **A** y **B**.

7. Para construir el punto **X** de **r** tal que **AXB** sea máximo, basta tomar de entre los dos puntos de tangencia el correspondiente a la circunferencia de menor radio, puesto que en ésta el ángulo central correspondiente a esta cuerda será mayor (y, por tanto, el ángulo inscrito también será mayor).

"De entre todos los triángulos que tienen un lado de longitud dada a y un perímetro p dado, ¿cuál es el triángulo que tiene área máxima?"

1. Para reducir el problema a la *obtención de un punto*, basta dibujar el lado de longitud dada **a=BC**. La incógnita es ahora el punto **A**, tercer vértice del triángulo.

2. La *función a optimizar* es la que hace corresponder a cada punto **P** del plano, el área del triángulo **BCP**. Dado que **BC=a** es constante, puede tomarse como *función a optimizar* la que hace corresponder a cada punto **P** del plano su distancia a la recta que contiene el lado **BC** (que es la altura del triángulo **BCP** relativa al lado **BC**).

3. Las *lineas de nivel* correspondientes a la función a optimizar son las rectas paralelas a la recta que contiene **BC** (ver figura 2).

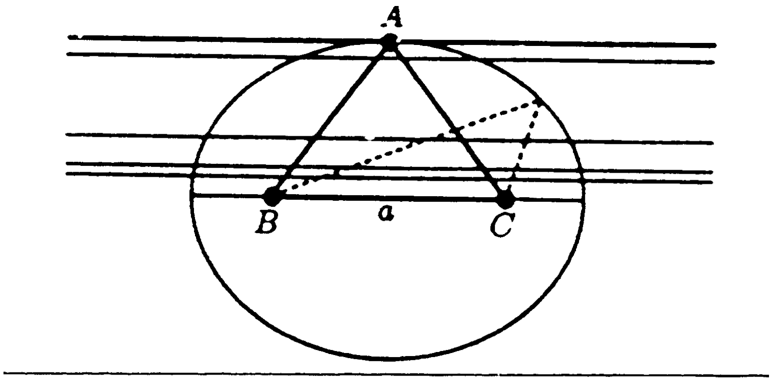

Fig. 2

4. La *trayectoria* del problema es una elipse de focos **B** y **C**, ya que se trata del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a **B** y a **C** es igual a **p-a** .

5. Por *simetría*, resulta que los únicos puntos en los que alguna curva de nivel es tangente a la trayectoria son los puntos de la elipse que equidistan de los focos **B** y **C.** Estos puntos proporcionan las únicas posibles soluciones del problema.

6. El triángulo buscado es el *isósceles* cuyo lado **BC=a** es dado y los dos lados restantes, **AB** y **AC** son iguales y miden **(p-a)/2.**

Poble Nou, julio de 1997

Josep Gascón
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Barcelona
Edificio C, 08193 Bellaterra (Barcelona) Spain
Fax: (3)5812790
E-Mail: gascon@mat.uab.es