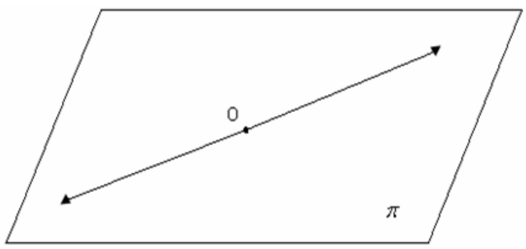
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES - TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
CARRERA EDUCACIÓN BÁSICA INTEGRAL

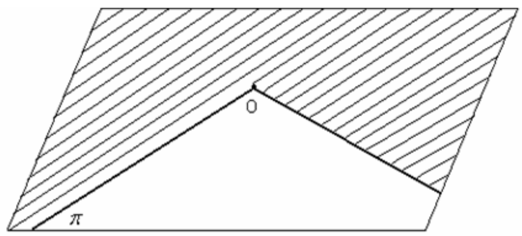
GEOMETRÍA 10
Prof. Alfonso Sánchez
ENCUENTRO 3

ÁNGULOS. ELEMENTOS. CLASIFICACIÓN

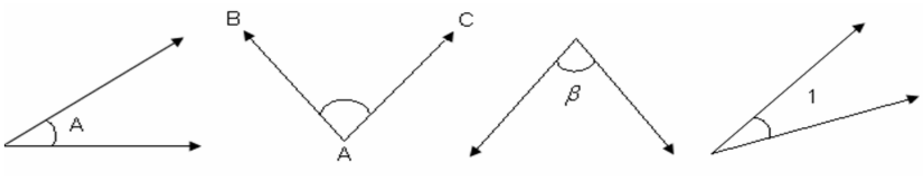
Consideremos un plano y ubiquemos un punto dentro de él. A partir de dicho punto tracemos dos semirrectas opuestas, el plano queda dividido por ellas en dos porciones que reciben el nombre de semiplanos, y que son iguales. Si trazamos desde un punto ¨O¨ dos semirrectas que no son opuestas, como lo muestra la figura presentada a continuación, las dos porciones en las cuales queda dividido el plano son diferentes: una es mayor que un semiplano (la rayada) y la otra es menor que un semiplano. Cada uno recibe el nombre de porción. La mayor que un semiplano, se denomina región angular cóncavo y la menor que un semiplano, se denomina región angular convexo.

Así mismo, la abertura de la porción del plano limitado por las dos semirrectas con un origen común, se denomina ángulo. Dicho origen se nombra vértice y las semirrectas lados del ángulo. Otra manera de conceptualizar lo que es un ángulo, es la abertura formada por dos porciones de una semirrecta que gira sobre un punto en común denominado vértice. Cuando se enuncie la palabra ángulo debe entenderse que se refiere exclusivamente al ángulo convexo y lo define la abertura correspondiente. Igualmente, una región angular está formada por el ángulo y los puntos interiores del ángulo.





Existen tres formas de enunciar un ángulo, a saber:



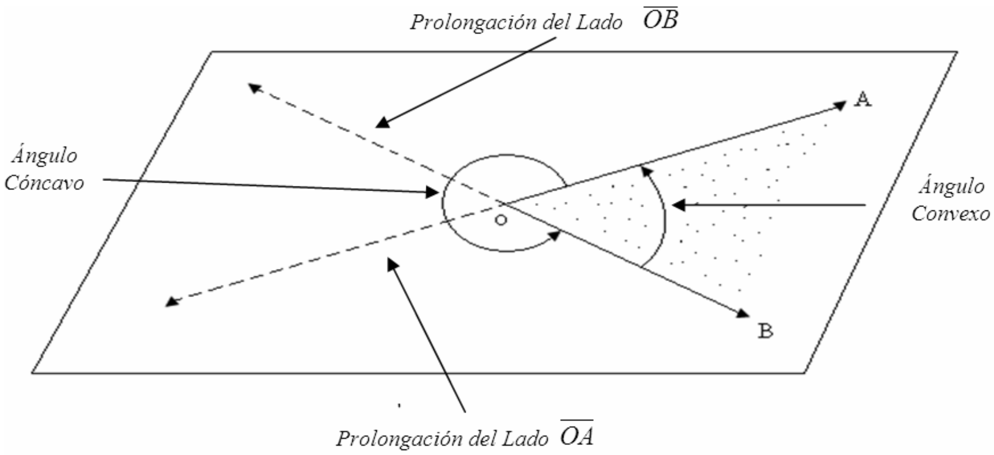
1. Por medio de una letra mayúscula colocada en el vértice (ángulo A).
2. Por medio de tres (3) letras mayúsculas, colocando en el medio la letra correspondiente al vértice, y las otras dos letras, una en cada extremo, corresponden a los lados del ángulo. (ángulo BAC).
3. Por medio de una letra griega o de un número dentro del ángulo. (ángulo β o, ángulo 1).

La notación más usual para referirnos a los ángulos es $<$. Los ángulos referidos anteriormente se escriben abreviadamente: $< A$, $< BAC$, $< \beta$, < 1. Es indiferente el orden en el cual se nombren los lados de un ángulo.

Los ángulos se pueden comparar, para ello se necesita una unidad estándar. Así como un segmento de recta puede medirse en metros, centímetros. Los ángulos se miden en grados o radianes.

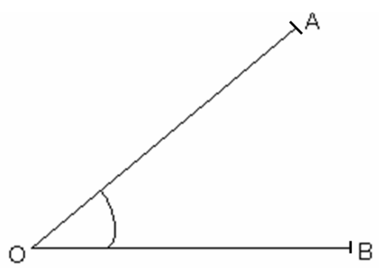
ÁNGULOS CÓNCAVOS Y CONVEXOS

Al unir en un plano dos semirrectas que tienen un origen común, se forman dos ángulos: uno comprendido entre los lados o semirrectas del ángulo (ángulo convexo) y otro que se obtiene al prolongar sus lados por el origen común o vértice (ángulo cóncavo).



IMPORTANTE. . . !

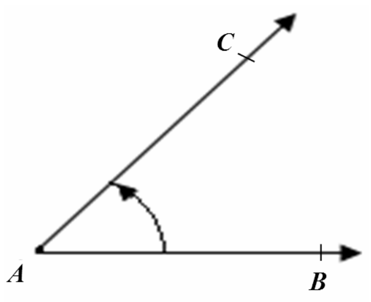
La siguiente figura no es un ángulo



Los lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son segmentos. Por tanto, es la unión de dos segmentos que tienen un origen común.

MEDICIÓN DE UN ÁNGULO

La amplitud o medida de un ángulo está determinada por la extensión del plano que queda comprendida entre los dos lados del ángulo.



La amplitud del ángulo BAC corresponde a la porción del plano comprendida entre el lado AB (lado inicial) y el lado AC (lado terminal). Por tanto, medir un ángulo es comparar su amplitud con otra amplitud que se toma como unidad de medida, para ello se utiliza los siguientes sistemas de medición:

SISTEMA SEXAGESIMAL

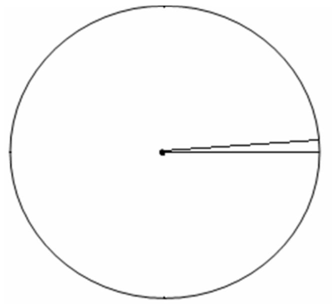
Su unidad fundamental es el grado. Y tiene como submúltiplos: el minuto y el segundo. Este sistema considera al círculo dividido en 360 partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de grado. Un grado a su vez se subdivide en 60 minutos y un minuto en 60 segundos.

La amplitud de un ángulo se mide con un instrumento llamado transportador y se mide en el sentido contrario a como se mueve las manecillas del reloj y su medida viene a ser el número que se le hace corresponder mediante el transportador.

Por tanto, el número de grado de un ángulo se llama su medida. Si hay z grados en el ángulo BAC, entonces escribimos:

$$m \angle BAC = z \text{ o su equivalente } \angle BAC = z^{\text{o}}$$

No es necesario utilizar el signo para grados cuando a las letras que representan el ángulo se le antepone la letra m de medida y el símbolo $\angle$ de ángulo. Por tanto, se puede afirmar que: $m\angle BAC$ es el número de grados en el $\angle BAC$.



1 grado $=\frac{1}{360}$ partes de un círculo

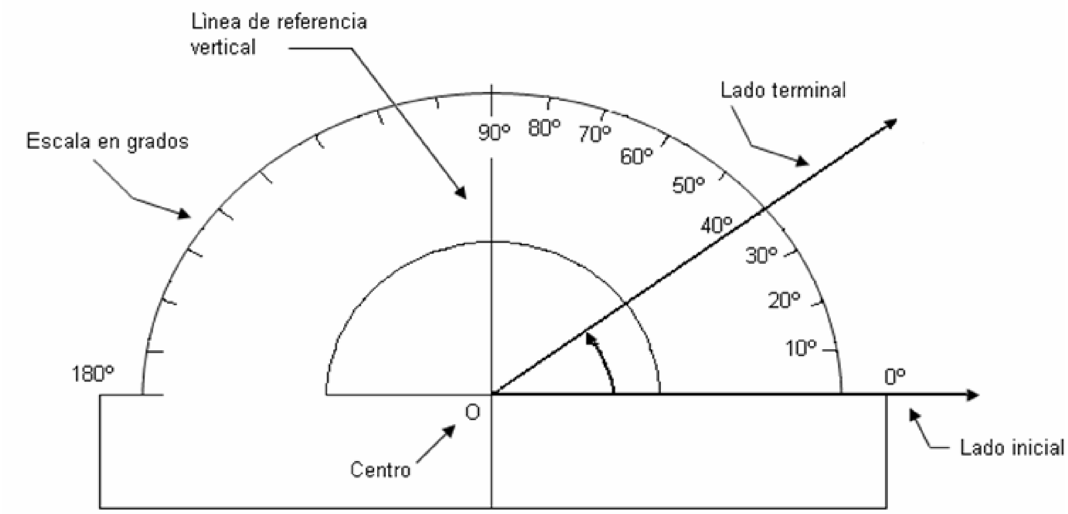
Para medir un ángulo con un transportador, se procede de la siguiente manera:

1. Se coloca el transportador sobre la figura a medir, haciendo que la línea de referencia horizontal que une el 0 con 180 coincida con el lado inicial del ángulo a medir.

2. Se hace coincidir la línea que baja de 90 grados del transportador con el vértice del ángulo a medir.

3. Se lee el valor indicado por la escala en el sitio por donde pasa el lado terminal; este será la amplitud del ángulo.

4. El número que se hace corresponder con la utilización del transportador, se denomina medida del ángulo.



IMPORTANTE..!

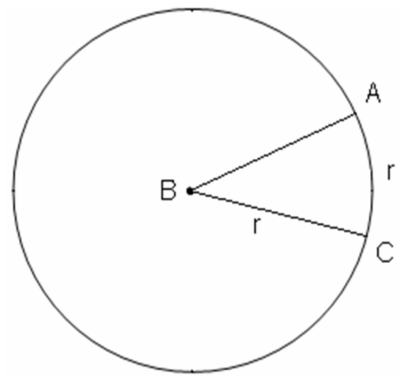
1. Cuando el lado terminal de un ángulo se le hace rotar en sentido contrario a las manecillas del reloj, el ángulo formado es positivo.

2. Cuando el lado terminal de un ángulo se le hace rotar en sentido a las manecillas del reloj, el ángulo formado es negativo.

3. Dos ángulos pueden tener el mismo lado inicial y terminal (ambos coinciden), a estos ángulos se le llaman coterminales.

SISTEMA CIRCULAR

Constituye otro recurso con el cual contamos para medir ángulos. Este sistema utiliza como unidad de medida el ángulo llamado *radían.* El cual es un ángulo cuyos lados comprenden un arco de circunferencia de longitud es igual al radio de la circunferencia. La longitud de una circunferencia es 2π radianes, es decir, 6,28 radianes, (asignándole a π el valor de 3,14).



1 radián = $\angle ABC$, donde el arco $CA = r$

La amplitud de un radián equivale en el sistema sexagesimal a un ángulo de 57^o 18', lo cual se obtiene al dividir un ángulo de 360^o entre la longitud de la circunferencia que equivale a 2π veces el radio.

SISTEMA DE CONVERSIÓN

1. **SISTEMA CIRCULAR AL SISTEMA SEXAGESIMAL**

Como π es equivalente a 3,1416, entonces:

1 radián = $\frac{360^o}{2\pi} = \frac{360^o}{6{,}2832} = 57,3$ grados = 57^o 18'

Para conocer en el sistema sexagesimal la amplitud de un ángulo expresado en radianes, se debe multiplicar los radianes por $\frac{360^o}{2\pi rad}$

Ejemplo: Expresar en el sistema sexagesimal a:

- 4 radianes
  4 rad. x $\frac{360^o}{2\pi rad} = 4(57^o\ 18') = 228^o\ 12'$
- $\frac{3}{2}\pi radianes$
  $\frac{3}{2}\pi rad\ x\ \frac{360^o}{2\pi rad} = \frac{3(360^o)}{4} = 270^o$

2. **SISTEMA SEXAGESIMAL AL SISTEMA CIRCULAR**

Para conocer en el sistema circular la amplitud de un ángulo expresado en grados, se debe multiplicar los grados por $\frac{2\pi rad}{360^o}$

Ejemplo: Expresar en el sistema circular a:

- 120^o
  $120^o\ x\frac{2\pi rad}{360^o} = 120^o\ x\ \frac{2(3{,}1416)rad}{360^o} = 2{,}09\ rad$

- 270^o
  $270^o\ x\ \frac{2\pi rad}{360^o} = 3\ \frac{2\pi rad}{4} = \frac{3\pi}{2} rad$

Ejemplo: Expresar en grados, minutos y segundos a:

- 35,413 grados

  $35{,}413^o = 35(0{,}413_x 60)' = 35^o\ 24{,}78'$

  $35^o 24'(0{,}78_x 60)'' = 35^o 24{,}47''$

Ejemplo: Expresar en el sistema circular a:

- $35^o 24' 47''$ a radián

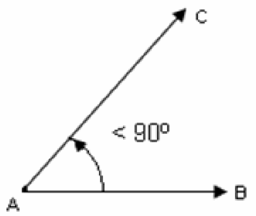
  $35^o 24' 47'' = [35 + \frac{24}{60} + \frac{47}{3600}] = 35{,}413$ grados

  $35{,}413^o\ _x\ \frac{2\pi rad}{360^o} = 0{,}618\ rad$

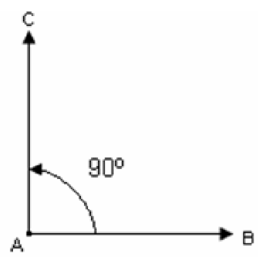
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

SEGÚN SU ABERTURA

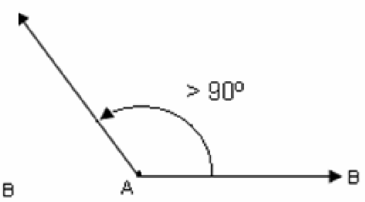
- AGUDO: Si la abertura mide menos de 90^o.
- RECTO: Si la abertura es igual a 90^o.
- OBTUSO: Si la abertura es mayor que 90^o y menor de 180^o.
- LLANO: Si la abertura es igual a 180^o.
- PLANO: Cuando la abertura mide 360^o.



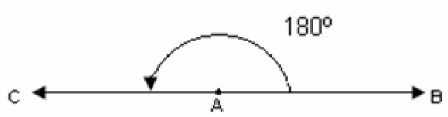
Agudo



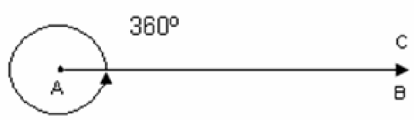
Recto



Obtuso



Llano



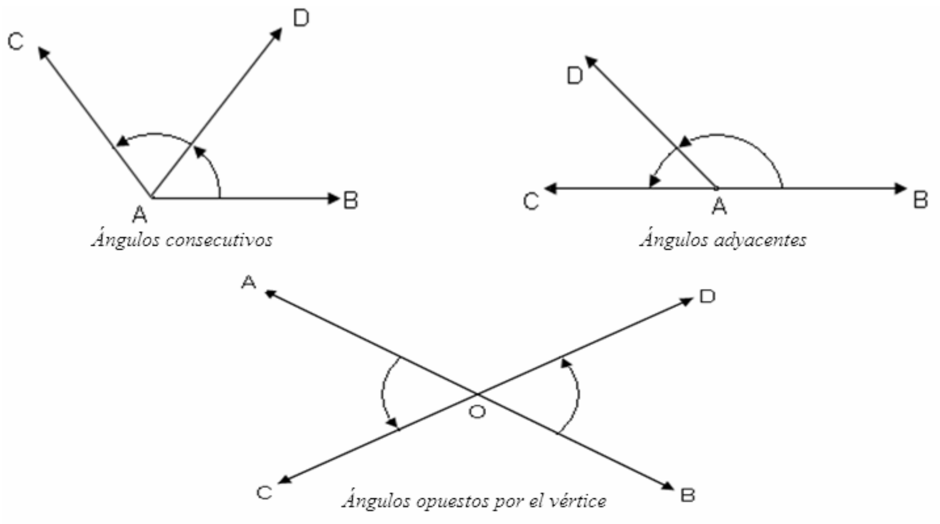
Plano

SEGÚN SU POSICIÓN

CONSECUTIVOS: Aquellos ángulos que poseen un lado en común.

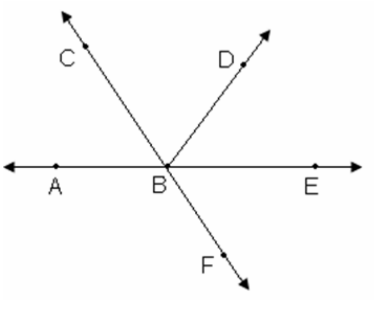
ADYACENTES: Aquellos ángulos que tiene un lado común y además los lados no comunes son semirrectas con sentidos opuestos.

OPUESTOS POR EL VÉRTICE: Aquellos ángulos que se obtienen por la prolongación de los lados de otro y tienen el vértice común.



Ángulos consecutivos
Ángulos adyacentes
Ángulos opuestos por el vértice

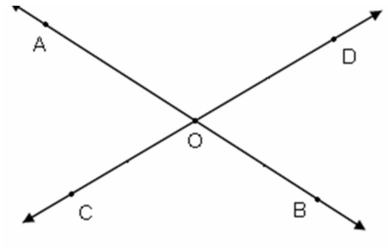
Ejemplo: En la siguiente figura, se puede observar que:



1. Los ángulos ABD y DBE son adyacentes, por cuanto son consecutivos (¿Por qué?) y los lados no comunes son $\overline{AB}$ y $\overline{BE}$ son semirrectas opuestas.

2. Los ángulos CBD y DBE no son adyacentes, ya que: son consecutivos (¿Por qué?) pero los lados no comunes son $\overline{CB}$ y $\overline{BE}$ no son semirrectas opuestas.

Ejemplo: En la siguiente figura, se puede observar que:



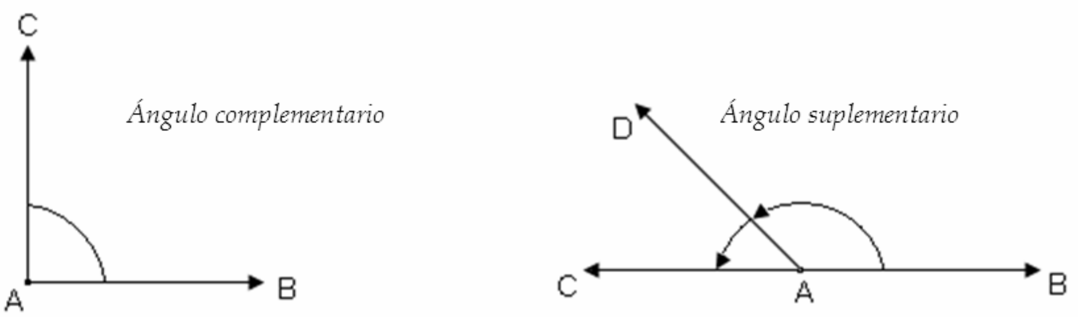
1. $\angle AOC \cap \angle DOB = \{0\}$
   (*vértice común*)
   $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ Son semirrectas opuestas y
   $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OC}$ Son semirrectas opuestas.
   $\angle AOC$ y $\angle DOB$ son ángulos opuestos al vértice.

2. Como son los ángulos COB y AOD?. ¿Por qué?

SEGÚN SU SUMA

COMPLEMENTARIOS: Son dos ángulos cuya suma equivale a 90°.

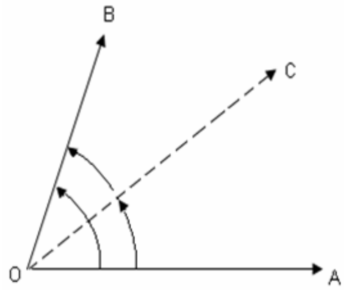
SUPLEMENTARIOS: Son dos ángulos cuya suma equivale 180°.



BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que tiene como origen el vértice y que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

Obsérvese que $\overrightarrow{OC}$ está en el interior del $\angle AOB$ y que $m\angle AOC = m\angle COB$, es decir: $\angle AOC \cong \angle COB$, por tanto, se puede afirmar $\overrightarrow{OC}$ que biseca al $\angle AOB$, y en consecuencia, $\overrightarrow{OC}$ se llama la bisectriz del $\angle AOB$.

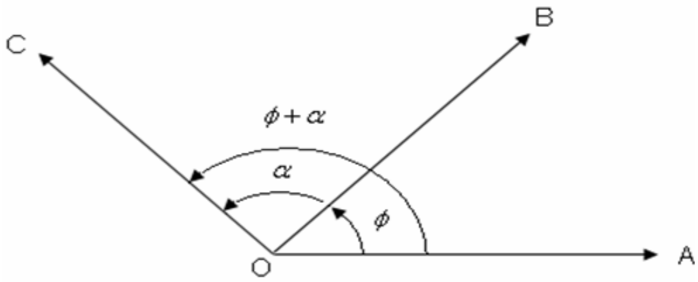


Se puede comprobar que: $\angle AOB = 70^o$ y $\angle AOC = 35^o$ y $\angle COB = 35^o$.

OPERACIONES CON ÁNGULOS

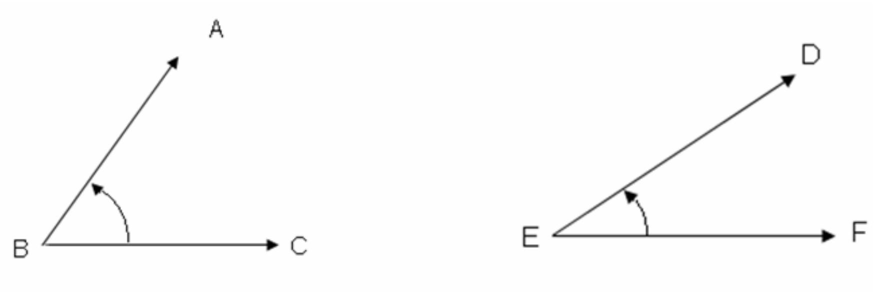
SUMA DE ÁNGULOS

Para sumar dos o más ángulos se coloca uno a continuación del otro, tal como se hizo con los ángulos consecutivos, y se mide tomando la medida desde el lado inicial del primer ángulo hasta el lado final del último ángulo.

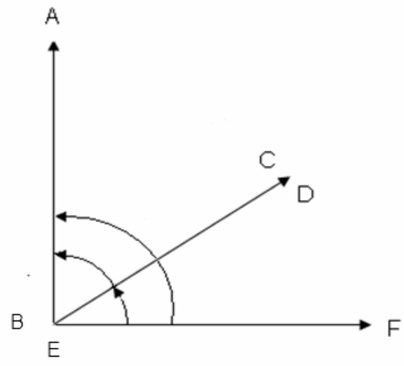


$$m\angle AOB + m\angle BOC = m\angle AOC$$

Ejemplo: Sumar los ángulos ABC y DEF



$\angle ABC = 55^o$ $\angle DEF = 35^o$

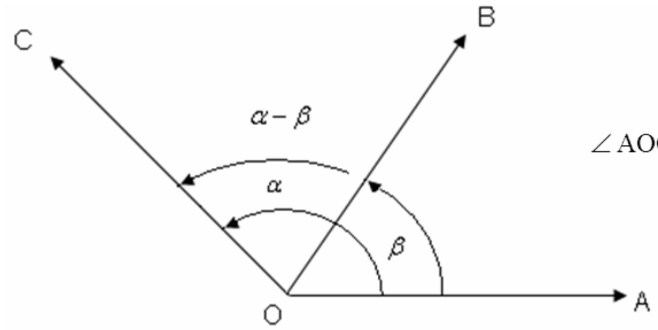


$$m\angle FED + m\angle CBA = m\angle FBA$$

$$35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$$

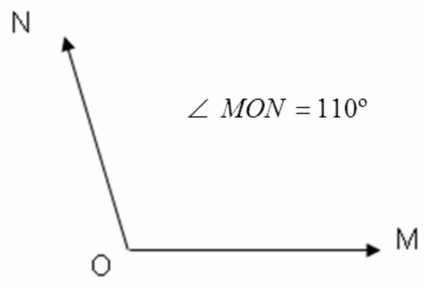
RESTA DE ÁNGULOS

Para restar dos ángulos se colocan de tal manera que el ángulo a restar (ángulo sustraendo), quede dentro del ángulo mayor (ángulo minuendo) de tal manera que coincidan sus lados iniciales. Luego se mide la amplitud desde el lado final del ángulo restado al lado final del ángulo del cual se resta. La amplitud es el ángulo resta.

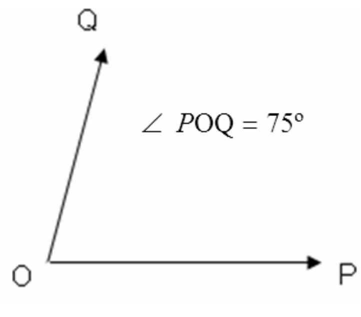


$$\angle AOC - \angle AOB = \angle BOC$$

Ejemplo: Restar del ángulo MON el ángulo POQ

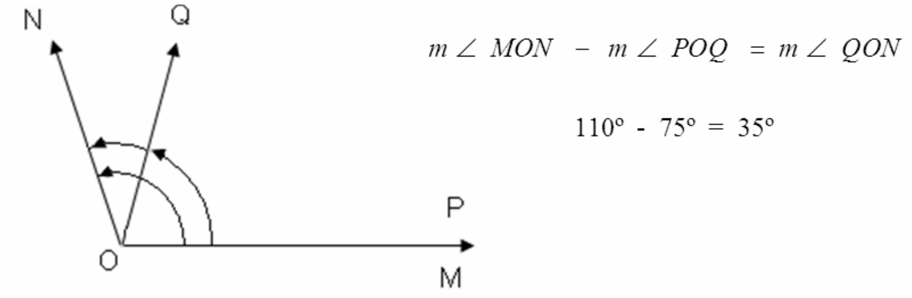


$$\angle MON = 110^\circ$$



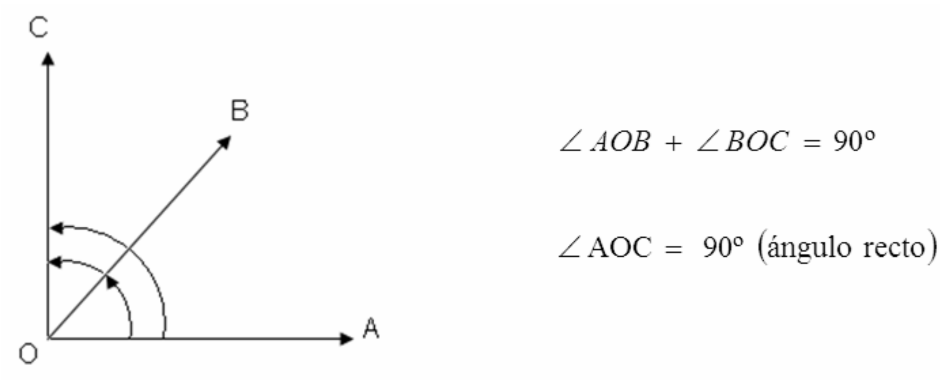
$$\angle POQ = 75^\circ$$

Colocamos el ángulo MON dentro del ángulo POQ, haciendo coincidir sus lados iniciales $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{OP}$ tendremos:



ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Cuando la suma de dos ángulos es igual a 90^o, los ángulos son complementarios. La suma de dos ángulos complementarios es igual a un ángulo recto.



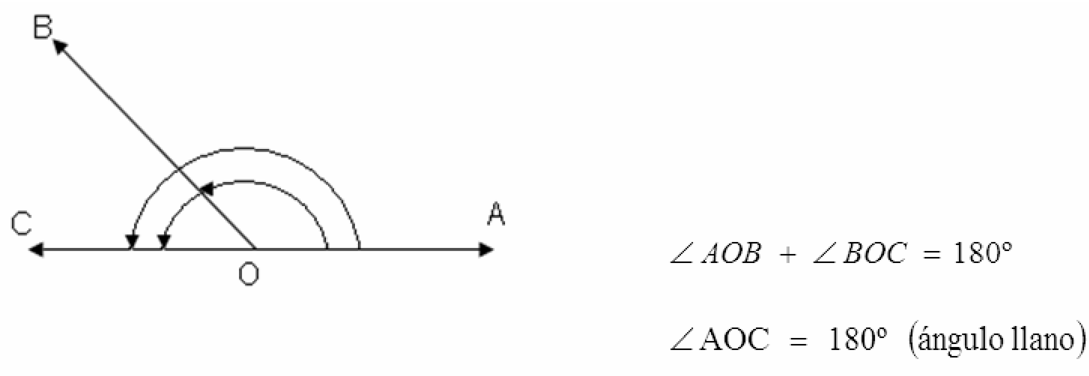
El complemento de un ángulo viene dado por la amplitud que le falta a ese ángulo para completar un ángulo recto. Si tenemos un ángulo de 80^o; su complemento será un ángulo de 10^o; ya que 80^o + 10^o = 90^o; o lo que es lo mismo: 90^o - 80^o = 10^o.

Otros ejemplos:

Ángulo	Complementario
50^o	40^o
68^o 40’	21^o 20’
75^o 30’ 30”	14^o 29’ 30”

ÁNGULOS SUMPLEMENTARIOS

Cuando la suma de dos ángulos es igual a 180^{o}, los ángulos son suplementarios. La suma de dos ángulos suplementarios es igual a un ángulo llano.



El suplemento de un ángulo viene dado por la amplitud que le falta a ese ángulo para completar un ángulo llano. Si tenemos un ángulo de 120^{o}; su suplemento será un ángulo de 60^{o}; ya que $120^{o} + 60^{o} = 180^{o}$; o lo que es lo mismo: $180^{o} - 120^{o} = 60^{o}$.

Otros ejemplos:

Ángulo	Suplementario
50^{o}	130^{o}
68^{o} 40'	111^{o} 20'
75^{o} 30' 30"	104^{o} 29' 30"

ACTIVIDAD ESPECIAL (Justifique su respuesta)

1. ¿Cuántas bisectrices puede tener un ángulo? ¿ un ángulo llano?
2. ¿Cuánto puede medir un ángulo agudo?
3. Un ángulo cuya medida es 90° se llama ...
4. Un ángulo obtuso según su clasificación corresponde a ...
5. Hallar el complemento de un ángulo de 30° y el de un ángulo de -30^{o}
6. Hallar el suplemento de un ángulo de 40° y el de un ángulo de -80^{o}
7. ¿Que es un ángulo coterminal?
8. ¿Cuánto puede medir dos ángulos para que sean coterminales?
9. Los ángulos opuestos por el vértice, tienen sus medidas ...
10. Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su complemento

11. Hallar el ángulo que es igual al doble de su suplemento
12. Hallar el valor del ángulo que disminuido en su suplemento es igual al triple de su complemento
13. ¿Cuándo dos ángulos cuyas medidas sean , se dicen que son complementarios? ¿Y suplementarios?
14. ¿Las bisectrices de dos ángulos suplementarios adyacentes forman un ángulo recto?
15. ¿Cuáles son los elementos de un ángulo?
16. ¿Cuáles son los sistemas de medidas de ángulos?
17. Hallar el complemento del ángulo de 20°.
18. Hallar el suplemento del ángulo de 10°.
19. Hallar el ángulo que es igual a su complemento
20. Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su suplemento
21. Un ángulo y su suplemento están en relación 5:1. Hallarlos
22. ¿La medida de un ángulo depende de la longitud de sus lados?
23. Calcular entre que valores puede variar la medida de un ángulo, para que la medida de uno de sus suplementos sea menor que 50º.
24. Calcular la medida de un ángulo α sabiendo que ésta es tres veces mayor que $m < \beta$ y $m < \beta$ es igual a la mitad de 40º26' .